Yura: Relaciones internacionales

Departamento de Ciencias Económicas, Administrativas y de Comercio

Revista electrónica ISSN: 1390-938x

N° 12: Octubre - diciembre 2017

Análisis de sensibilidad en modelos de programación lineal mediante uso de software

pp. 221 - 237

Jarrín Mantilla, Walter Patricio; Quintana Sánchez, Armando Miguel

Universidad Central del Ecuador

Quito, Ecuador

Av. Universitaria.

wpjarrin@uce.edu.ec

Análisis de sensibilidad en modelos de programación lineal mediante uso de software

Jarrín Mantilla, Walter Patricio; Quintana Sánchez, Armando Miguel
Universidad Central del Ecuador
wpjarrin@uce.edu.ec

Resumen

El objetivo del estudio fue demostrar la utilidad del uso de una herramienta tecnológica en el análisis de sensibilidad en modelos de programación lineal, la metodología de tipo descriptivo se aplicó a dos variables de todas las dimensiones que se presenta en la gestión empresarial; el método se envistió de un enfoque mixto al haber abordado lo sistémico-complejo por su característica causal, y la cuantitividad por el análisis de sensibilidad de procesos cíclicos y recurrentes que responden a mecanismos causa-efecto; el resultado de la investigación permitió partir de un planteamiento de modelo matemático para un problema típico de manufactura, que luego se lo resuelve usando el método gráfico para visualizar descriptivamente los resultados, posteriormente se utiliza comparativamente el método gráfico y los resultados del software POM-QM, interrelación que permite salvar el escollo del método tradicional de análisis de sensibilidad, finalmente se concluye que la aplicación del método sugerido permite al Administrador de las organizaciones y empresas la toma de decisiones adecuadas.

Palabras clave

Análisis de sensibilidad, modelo matemático, programación lineal, maximización.

Abstract

The objective of the study was to demonstrate the utility of the use of a technological tool in the sensitivity analysis in linear programming models, the descriptive methodology was applied to two variables of all the dimensions presented in the business management; the method was based on a mixed approach, having addressed the systemic-complex due to its causal characteristics, and the quantitative approach to the sensitivity analysis of cyclic and recurrent processes that respond to cause-effect mechanisms; the result of the investigation allowed us to start from a mathematical model approach for a typical manufacturing problem, which is then solved using the graphical method to descriptively visualize the results, then the graphical method and the results of the POM-QM software are used comparatively , interrelation that allows to overcome the stumbling block of the traditional method of sensitivity analysis, finally it is concluded that the application of the suggested method allows the Administrator of organizations and companies to make appropriate decisions.

Keywords

Sensitivity analysis, mathematical model, linear programming, maximization

La Programación Lineal (PL) es una técnica matemática que permite optimizar recursos de acuerdo a los objetivos planteados mediante el uso de distintas restricciones aplicadas en sus variables, se trata entonces de un modelo constituido de la interacción de una función objetivo y sus restricciones vistas de manera lineal. La programación lineal vislumbra que las variables decisoras (objetivo y restricción) puede mantener un comportamiento lineal, de esta manera se pueden simplificar cálculos y obtener resultados próximos a la realidad deseada. Una vez aplicado el modelo lineal, generalmente surgen preguntas acerca de la variación de resultados, variación llamada análisis de sensibilidad, En el presente trabajo se plantea la utilización de software para hacer este análisis, a fin de ejecutarlo en el menor tiempo y con mejores argumentos para su estudio.

En este sentido se considera que a partir de la revolución industrial las empresas buscaron especializarse en ciertos campos que les permita minimizar riesgos y maximizar utilidades, para esto es necesario una asignación eficaz de los recursos disponibles, parafraseando a Hillier y Lieberman (2008, p. 1) esta necesidad favorece el aparecimiento y posterior auge de la investigación de operaciones (IO), también llamada por algunos autores como: investigación operativa, métodos cuantitativos o gerencia de operaciones. Su ámbito de aplicación es muy amplio, va desde solucionar problemas de falta de recursos en el ámbito militar, hasta una prolija asignación de los mismos en proyectos empresariales de gran envergadura.

Por otra parte las empresas tienen la necesidad de resolver problemas relacionados con su gestión administrativa y financiera, una herramienta que permite mitigar riesgos es la Investigación Operativa y sus fases, que de acuerdo con Ortiz-T. & Caicedo-R., (2014) son cinco, "definición del problema, construcción del modelo, solución del modelo, validación del modelo e implementación de la solución", modelo que si bien en cierto minimiza los riesgos, no garantiza una homogeneidad de cumplimiento y aplicación.

Como sostienen Mula; Peidro; Díaz & Hernández, (2010), la IO es una técnica que puede ser expresada en modelos matemáticos, cada uno con un propósito específico y con aplicaciones más concretas y especializadas. "Desde su aparición en la década de los 40, el modelo más difundido y estudiado es la Programación Lineal, pero a partir de la década del 80" (p. 184), según (Morales, 2012, p. 12), se desarrollan otros modelos, que combinan el concepto de números *fuzzy* (difusos) y los mecanismos de la programación lineal para obtener un nuevo modelo llamado Programación lineal *fuzzy*, que resuelven muchos problemas de la vida real que se caracterizan por tener datos imprecisos ya que la información es incompleta, es decir con incertidumbre, (Coronado-Hernandez & Garcia-Sabater, 2017), característica que la Programación lineal clásica no la considera, también se mencionan los modelos de programación lineal multiobjetivo (Díaz-Madroñero, Peidro, & Mula, 2010). Otros autores clasifican a los modelos que representan la realidad, como: modelos mentales, modelos físicos y modelos matemáticos (Puche Regaliza, Costas Gual, & Arranz Val, 2016, pág. 190).

“Aunque en la actualidad ya se cuenta con técnicas basadas en inteligencia artificial y procedimientos meta heurísticos (algoritmos genéticos, búsqueda tabú, entre otros)” (Buitriago & Ramírez, 2017, p. 24), todavía hay mecanismos analíticos manuales que permiten descubrir avances en esas técnicas, y en su mismo estudio (Buitriago & Ramírez, 2017, p. 24) corrobora esta apreciación, al desarrollar un algoritmo para obtener un punto de inicio dentro del área factible de solución. Otro estudio concluye, que una vez inicializado un algoritmo se deben realizar cálculos iterativos para encontrar una solución óptima (Ramírez Leal, Buitrago Suescún, & Britto Agudelo, 2012, p. 69). Los problemas de programación lineal no siempre son de fácil resolución, sobre todo cuando existe un gran número de variables y restricciones involucradas, esto puede impedir que el modelo se adopte en ciertas empresas, ante esta dificultad surgen alternativas de solución mediante aplicaciones informáticas o software especializado.

Antes de resolver cualquier problema de Programación Lineal es necesario resaltar la importancia de convertir el texto del problema en un Modelo matemático, lo cual en ocasiones se torna en la tarea más ardua de la resolución. El Modelo se compone: (Anderson, 2011) por una función objetivo lineal, una serie de restricciones lineales y variables no negativas. Nótese que se hace hincapié en el término lineal, esto porque las variables y funciones que intervienen son de primer grado o lineales. Las variables no negativas se llaman también variables de decisión y su característica esencial es justamente, ser positivas o cero, pero tomarán valores definitivos una vez resuelto el problema. Las variables matemáticas se representan por: X, Y, Z o alguna otra secuencia del alfabeto como A, B, C, etc., en Programación lineal, aunque depende de cada autor, las variables de decisión se identifican generalmente con la nomenclatura Xi, la letra X acompañada del subíndice i, que representa secuencialidad, así por ejemplo, X equivale a X_1, Y corresponde a X_2, y Z a X_3.

La Función Objetivo (FO) es una “Expresión que define la cantidad que se va a maximizar o minimizar” (Anderson, 2011, p. 19), está formada por una relación entre variables de decisión y ciertos coeficientes que representan el costo o ingreso, que cada variable aporta al valor total de la función objetivo; la mayoría de autores utilizan la letra mayúscula Z para representar a la función objetivo. Otro elemento importante del modelo, es identificar el objetivo (la meta) que necesitamos optimizar (maximizar o minimizar) (Taha, 2012).

Las restricciones tienen que ver con la disponibilidad de recursos, es decir son limitantes propios del problema. Las restricciones limitan el grado en que se puede alcanzar el objetivo. (Render, 2012). Matemáticamente las restricciones se identifican con desigualdades o inecuaciones, del tipo: $3X_1 + 4X_2 \geq 100$ o $2X_1 + 3X_2 \leq 150$. Una de las restricciones más importantes en el modelo es la condición de no negatividad de las variables de decisión, lo cual no significa que son positivas. La diferencia es que no negativo permite que el valor sea cero, mientras que positivo prohíbe el uso de dicho valor (Eppen, Gould, Schmidt, Moore, & Weatherford, 2000).

Un modelo de Investigación Operativa que consta de: Objetivo, Función Objetivo y Restricciones, puede extenderse a cualquier problema de Programación lineal y se asume como formato general tal como se especifica en (Taha, 2012). Inicialmente aparece el *Objetivo* que persigue el modelo que puede ser: Maximizar o Minimizar, lo primero se utiliza cuando se trata de incrementar utilidades, y lo segundo, cuando se desea reducir costos. Al objetivo le sigue la *Función Objetivo*, por ejemplo: $Z = 200X_1 + 300X_2$, nótese que está formada por las variables de decisión X_1 y X_2, y los coeficientes 200 y 300, que constituyen el aporte que cada variable hace al valor total de la FO. Antes de escribir las *Restricciones*, va la frase "sujeto a:" o las siglas "s.a.:", y luego aparecen inecuaciones que representan a cada restricción, el número de restricciones y el sentido de las mismas son particularidad de cada problema. En una restricción, comúnmente aparece el símbolo "≥" que se lee "mayor o igual que" y el símbolo "≤" que se lee "menor o igual que".

Para el desarrollo de esta investigación se elige el método sistémico-complejo, ya que en el análisis de sensibilidad es importante tomar en cuenta todas las características de un fenómeno como: la estabilidad, la periodicidad y los ciclos del modelo de PL, esto coincide con las directrices generales del enfoque sistémico, (Ojeda, Jiménez, Quintana, Crespo, & Viteri, 2015, p. 4). "Se pueden introducir conceptos como equilibrio, estabilidad, periodicidad, ciclos, modos, crecimiento y competencia"

Las condicionantes de elección del método descriptivo están sujetas a las bondades de interpretación que permiten entre otras acciones: Examinar las características del análisis de sensibilidad; enunciar hipótesis; seleccionar las técnicas adecuadas para recolectar datos; establecer categorías de las variables precisas; verificar la validez de las técnicas empleadas,

Los objetivos que motivan la investigación se relaciona con determinar elementos del modelo de PL para el problema tipo, establecer las coordenadas de los puntos de corte de la restricción R1, enfocar los vértices del ASF y su respectiva FO, establecer los rangos de variación de los coeficientes de la FO, establecer los rango de valores para el lado derecho de las restricciones, graficar las determinantes del análisis de sensibilidad.

Materiales y Métodos

La investigación tiene un enfoque cuantitativo, por cuanto se interna en el ámbito de los modelos matemáticos, éstos se generan por interacción directa entre variables, cuyos valores son numéricos y generan a su vez un resultado numérico. La información utilizada en la investigación se origina básicamente en fuentes documentales y los datos que se obtienen son fruto de la observación y la experimentación casuística en modelos previamente resueltos. El estudio es posible gracias a que se utiliza un modelo de investigación dependiente, en el que existe una relación de dependencia causal, el uso de software (variable independiente - causa) y el análisis de sensibilidad (variable dependiente - efecto). La utilización del método de investigación sistémico-complejo se justifica por cuanto los modelos requieren de mucha interacción entre sus elementos, y esto es coherente con la concepción de método sistémico, que manifiesta:

> El método sistémico se encuentra insertado en el Pensamiento Complejo y en la Teoría de Sistemas, a nivel de la identificación de las interacciones entre los componentes que conforman el sistema y las interacciones del sistema con su entorno inmediato, identificado por Maturana como nicho, o entorno mediato. (Guzmán Quiroga & Peeters, 2006, p. 69)

Para realizar el presente estudio, se utiliza un problema que contiene dos variables de decisión, “Cuando hay más de dos variables, no es posible mostrar la solución en una gráfica bidimensional y se debe recurrir a enfoques más complejos.” (Render, 2012, p. 253). Una característica importante de este método de solución es que permite visualizar fácilmente el área de solución factible (ASF), es decir el área donde se encuentra la solución del problema, también llamada región factible. “La región factible es el conjunto de puntos que satisfacen todas las restricciones.” (Render, 2012, p. 256).

El análisis de sensibilidad tiene dos partes, cambio en los coeficientes de la FO y cambio en el lado derecho de las restricciones. El cambio de coeficientes también se hace de dos maneras, en la primera se realiza cambios en uno de los coeficientes de la FO, mientras que los otros coeficientes y las restricciones del modelo quedan invariables. La segunda forma supone que hay cambios combinados en todos los coeficientes de la FO, pero no en las restricciones, en este caso para el análisis se utiliza la regla del 100 por ciento, Anderson

(2011) “Para todos los coeficientes de la función objetivo que cambian, sume los porcentajes de los aumentos y las disminuciones permisibles; si la suma es menor o igual que 100%, la solución óptima no cambiará.” (p. 302).

La segunda parte del análisis de sensibilidad tiene que ver con los cambios que se realizan en la parte derecha de las restricciones, y su efecto tanto en el ASF como en el valor de la función objetivo. El incremento de una unidad en el lado derecho de las restricciones puede variar el costo o la utilidad que refleja la función objetivo, a esto se denomina *precio sombra* (Render, 2012, p. 285) o *precio dual* (Anderson, 2011, p. 303).

Resultados

De acuerdo a los datos e información que se desprende de un problema tipo de manufactura, cuyo modelo se detalla en la Tabla1, hay dos variables de decisión, que corresponden a los productos que se van a elaborar: X_1 para el número de puertas y X_2 para el número de ventanas. Una vez identificadas las variables, el siguiente paso es determinar el objetivo del modelo, en este caso se trata de Maximizar, que se deduce de la pregunta del problema (calcular cuántas puertas y cuántas ventanas se debe fabricar para que la utilidad sea *máxima).* Las restricciones limitan los valores que toman las variables de decisión y el nivel en que se puede alcanzar el objetivo, por tanto se derivan de las cantidades disponibles de materiales para la producción de puertas y ventanas, esto es madera, vidrio y hierro; además hay otros limitantes, el total de días con que cuenta el cerrajero para entregar el pedido y el número mínimo de puertas que debe incluir en el pedido, todo esto da lugar a cinco restricciones. Nótese que hay una restricción que solamente contiene una variable de decisión, lo cual es válido y muy común. El modelo de programación lineal para este problema tipo, con las restricciones identificadas como Ri, es como se indica a en la siguiente tabla:

Tabla 1
Elementos del modelo de PL para el Problema tipo

Elementos del Modelo	Descripción	Ri
Objetivo	Maximizar	
Función Objetivo	$Z = 100X_1 + 80X_2$	
	$0.5X_1 + 0.25X_2 \leq 15$	R_1
	$2X_1 + 0.5X_2 \geq 25$	R_2
Restricciones	$0.5X_1 + 1.5X_2 \geq 20$	R_3
	$0.5X_1 + X_2 \leq 30$	R_4
	$X_1 \geq 8$	R_5
No negatividad	$X_1, X_2 \geq 0$	

Nota. Determina elementos del modelo

Para graficar cualquier restricción, por ejemplo la R_1, se sugiere tratarla como si fuera una ecuación, dar valores extremos de cero a cada variable alteradamente y calcular la otra variable restante, de manera que se facilite la obtención de las coordenadas de los puntos donde la inecuación corta a los ejes X_1 y X_2. Así, si hacemos que X_1 sea igual a cero, entonces X_2 toma el valor de 60, y viceversa, si ahora X_2 es cero, el valor de la variable X_1 es 30, como se observa a continuación.

Tabla 2

Coordenadas de los puntos de corte de la restricción R1

X1	X2
0	60
30	0

Nota. Coordenadas para graficar las restricciones

El mismo procedimiento se realiza para todas las restricciones, sin embargo la R_5 tiene una particularidad, al seguir el mismo formato no permite calcular valores, ya que si $X_1=0$, se produce una inconsistencia. Por tanto en estos casos donde la restricción tiene una sola variable, se grafica directamente una recta perpendicular al eje de dicha variable, en el punto señalado por la restricción. Una vez que se grafican las restricciones se debe determinar el *semiplano solución*, puesto que se trata de una inecuación. Para ello se dan valores a las coordenadas de un punto cualquiera que se encuentre fuera de la línea trazada, luego se evalúa este punto en la desigualdad (restricción), si la respuesta es *verdadera*, entonces este punto y todos los demás puntos de ese lado de la recta, forman el semiplano solución, en cambio si la respuesta es *falsa*, el semiplano solución estará al otro lado de la recta.

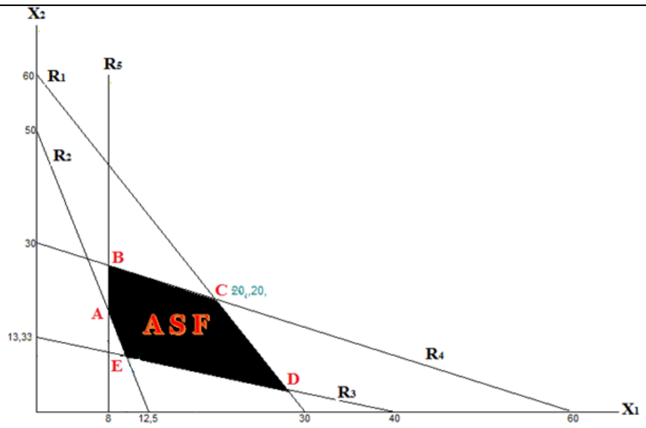

Figura 1. Gráfico íntegro del modelo de PL

Nota. Gráfica que denota los vértices en el plano

El gráfico correspondiente al modelo desarrollado tiene la forma que se muestra en la Figura 1, en él se evidencia el ASF, resaltada con fondo negro, y los vértices que se identifican con las letras A-B-C-D-E, no hay ningún criterio específico para escoger el orden de los vértices. Cada vértice es un punto en el plano cartesiano, por eso tiene dos coordenadas (X_1, X_2), éstas se obtienen al resolver el sistema de inecuaciones cuya intersección coincide con dicho vértice. Por ejemplo en el punto A, se observa que las rectas que ahí se cruzan son R_2 ($2X_1 + 0.5X_2 \geq 25$) y R_5 ($X_1 \geq 8$), al resolver este sistema por cualquiera de los métodos conocidos, se obtiene como resultado el par ordenado (8,18), es decir X_1 es igual a 8 y X_2 es igual a 18. Estos valores se reemplazan en la función objetivo Z ($100X_1 + 80X_2$), y se obtiene el valor Z = 2.240.

Un cálculo similar se realiza para encontrar los otros vértices y el valor de su FO, con esto se obtiene los valores que se indican en la Tabla 3. El siguiente paso es buscar en la columna Función Objetivo el mayor valor, ya que el objetivo del modelo es Maximizar (en los casos de Minimización, se escoge el valor más bajo), se observa entonces que el punto correspondiente es C, con Z=3.600 y coordenadas: X_1 = 20 y X_2 = 20. Así, se deduce que la cerrajería debe fabricar 20 puertas y 20 ventanas para lograr una utilidad de 3.600 dólares, que es la máxima posible, siendo la solución óptima que se buscaba como respuesta al modelo de programación lineal planteado para el problema tipo.

Tabla 3
Vértices del ASF y su respectiva FO

Vértices	Coordenadas		Función Objetivo
	X_1	X_2	Z
A	8	18	2.240
B	8	26	2.880
C	20	20	3.600
D	28	4	3.120
E	10	10	1.800

Nota. Modelo de maximización

Análisis de sensibilidad

Una vez resuelto el problema surgen algunas interrogantes con el fin de proyectar resultados alternativos. El dueño de la cerrajería podrá preguntarse por ejemplo: ¿qué pasa si aumenta o disminuye la utilidad de una puerta?, ¿qué sucede si aumenta o disminuye la utilidad de una ventana? ó, ¿qué pasa si la utilidad de los dos productos varía al mismo tiempo?... estas preguntas tienen que ver con la variación en los coeficientes de la función objetivo; también puede preguntarse: ¿qué pasa si se dispone de mayores o menores recursos (madera, vidrio, hierro o días plazo)?, esto se refiere al cambio del lado derecho de las restricciones. En cualquiera de los casos ¿será que la solución óptima se mantiene?

Análisis de la variación en los coeficientes de la FO en forma gráfica

Para responder a las preguntas se puede hacer un procedimiento analítico de la *pendiente* (grado de inclinación de la recta con respecto al eje horizontal) de la función objetivo $Z = 100X_1 + 80X_2$. Otra forma es utilizar el método gráfico, para esto es necesario volver a resolver el modelo como si se tratara de un problema diferente, para verificar si se mantiene la solución óptima en el vértice C (20,20).

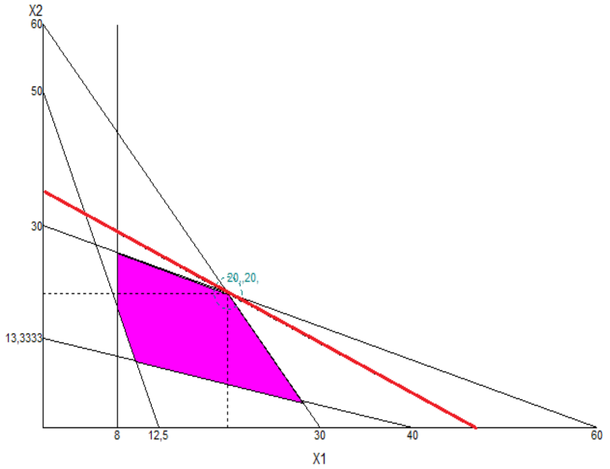

Figura 2. Variación moderada en los coeficientes de la FO
Nota. Gráfico con coeficientes modificados

Asuma, que el coeficiente 80 (que es el aporte de la variable X_2 a la utilidad total) y las restricciones, permanecen constantes; y que el coeficiente de X_1 ahora es 60; entonces, según se observa en el gráfico (línea roja) de la Figura 2, el vértice C (20,20) no cambia pero si la FO, ya que al calcular su valor ($Z = 60X_1 + 80X_2$), la utilidad máxima es 2.800. De forma similar, si se mantienen constantes el coeficiente de la variable X_1 y las restricciones, y ahora el coeficiente de X_2 es igual a 100, se observaría que el vértice sigue siendo el mismo punto C (20,20), pero ahora la utilidad máxima cambia a $Z = 4.000$, calculada con la función objetivo: $Z = 100X_1 + 100X_2$.

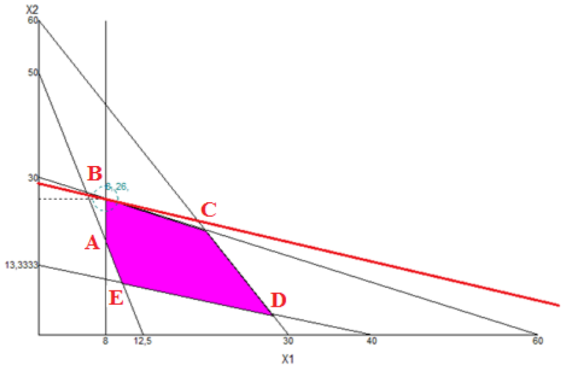

Figura 3. Variación grande en los coeficientes de la FO
Nota. Gráfico con coeficientes modificados

Ahora observe el gráfico de la Figura 3, cuando los coeficientes sufren modificaciones drásticas, por ejemplo si X_1 disminuye de 100 a 30 (con 70 dólares de diferencia) y X_2 se mantiene constante, la función objetivo $Z = 30X_1 + 80X_2$ también cambia fuertemente su inclinación (línea roja), y el vértice de la solución óptima ahora es el punto B (8,26), a diferencia de los gráficos anteriores donde este vértice se mantenía en C. Si calcula Z con las nuevas coordenadas, el valor máximo de la utilidad será Z=2.320, que corresponde a la fabricación de 8 puertas y 26 ventanas. Se podría hacer un número infinito de combinaciones entre los valores que pueden tomar los coeficientes de la FO, y cada vez generar un nuevo gráfico sin llegar a determinar cuál es la lógica del comportamiento de la función Z para dichos cambios, esto es una tarea realmente muy complicada.

Análisis de la variación en los coeficientes de la FO con ayuda de software

Para solventar esta dificultad, el software POM-QM permite hacer los gráficos fácilmente y en muy poco tiempo, con lo cual se tiene un primer beneficio, pero la mayor ayuda consiste en que este aplicativo genera varias matrices con información muy relevante, una de esas matrices extraídas del programa se observa en la Tabla 4, en la que se muestran algunas cifras que corresponden al rango de valores en los que puede fluctuar cada coeficiente de la FO, sin afectar la solución óptima, es decir sin que cambie el punto C (20,20), con cualquier valor fuera de esos rangos la función objetivo y la solución óptima toman diferentes valores.

Tabla 4

Rangos de variación de los coeficientes de la FO

Variable	Valor	Límite inferior	Valor original	Límite superior
X_1	20	40	100	160
X_2	20	50	80	200

Nota. Análisis de la variación en los coeficientes de la FO

En la primera fila se observa el valor original (100) que tiene la variable X_1 en la función objetivo ($Z = 100X_1 + 80X_2$), adicionalmente hay dos valores, 40 y 160 que corresponden a los límites inferior y superior, respectivamente. Matemáticamente esto significa: $40 < X_1 < 160$, es decir que el coeficiente de X_1 puede variar entre 40 y 60, sin que sea igual a los extremos, y si además el coeficiente de X_2 es 80, entonces el vértice de solución óptima se mantiene en el punto C (20,20), aunque la utilidad tenga cambios. Igual análisis merece la variable X_2, si ésta varía en el rango: $50 < X_2 < 200$, y el coeficiente de X_1 se mantiene en 100, entonces el punto C sigue como la solución óptima, no obstante la utilidad si se altera.

En ocasiones es factible que se presente un cambio simultáneo de varios coeficientes, en este caso el análisis de sensibilidad hace uso de la regla del 100 por ciento. En la Tabla 5 se observan los valores de incremento y disminución máxima a los que puede llegar cada coeficiente, con estos valores, se aplica la regla arriba señalada.

Tabla 5

Rango de valores de los coeficientes de la FO

Variables de decisión	Límite inferior	Valor actual	Límite superior	Disminución permitida	Incremento permitido
$\mathbf{X_1}$	40	100	160	60	60
$\mathbf{X_2}$	50	80	200	30	120

Nota. Establece los valores por incremento y disminución

Por ejemplo si el coeficiente de X_1 baja de 100 a 80 tiene una diferencia de 20 dólares, y como para esta variable la disminución permitida es de 60, el porcentaje de disminución se calcula dividiendo 20/60, lo que arroja un porcentaje de 33.33%. De igual manera, para la variable X_2, si sube de 80 a 130 la diferencia es 50 dólares, y el porcentaje de incremento es 50/120, es decir 41.66%. Ahora se suma estos porcentajes (33.33% + 41.66% = 74.99%), y si el resultado es menor que 100% (como es el caso), entonces la solución óptima no se altera y el punto C (20,20) sigue siendo la solución óptima. La utilidad máxima es 4.200 calculada con $Z = 100X_1 + 80X_2$ para una producción de 20 puertas y 20 ventanas.

En caso contrario, es decir cuando la suma sea mayor al 100%, no se puede decir con certeza que la solución óptima se modifique, en ese caso hay que demostrarlo, sin embargo esto se facilita con la ayuda del software POM-QM,

Análisis de la variación en el lado derecho de las restricciones en forma gráfica

Cuando el cambio se realiza en el lado derecho de las restricciones, o sea si aumenta o disminuye los limitantes de recursos, generalmente hay un cambio en la solución óptima, es decir en el punto o vértice óptimo. Es necesario entonces analizar dos casos, el uno cuando solamente se cambia el lado derecho de una de las restricciones, y el otro, cuando en forma combinada se cambia el lado derecho de varias restricciones.

Para el primer caso, suponga que se incrementan 3 quintales de varilla y el resto de materiales quedan exactamente como en el problema original, de manera que ahora se cuenta con 18 quintales para la producción. Esto hace que el ASF se alargue a la derecha y consecuentemente el punto de solución óptima también se desplace, generando una solución diferente a la del problema planteado inicialmente, como se observa en la Figura 4. El punto C (28,16) es actualmente la solución óptima y genera una utilidad de 4.080 dólares, calculada con la función $Z = 100X_1 + 80X_2$.

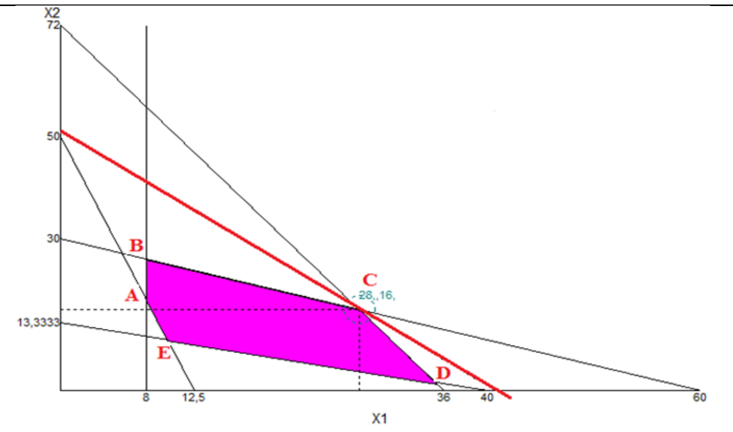

Figura 4. Problema tipo, con modificación en el lado derecho de la restricción de varilla
Nota. Análisis de la variación en el lado derecho de las restricciones

Análisis de la variación en el lado derecho de las restricciones con ayuda de software

El aporte del incremento de 3 quintales de varilla a la utilidad total es de 480 dólares (\$4.080 - \$3.600), si se hace un cálculo para determinar el incremento unitario, en este caso por un quintal de varilla, se obtiene \$160 (480/3), que es el aporte a la utilidad total del modelo por incrementar un quintal en el lado derecho de la restricción, lo que corresponde al precio sombra o precio dual. Si ahora se supone una disminución en el lado derecho, con el análisis respectivo se verá que la utilidad también disminuye, 160 dólares por cada unidad de variación.

En la información de la Tabla 6 se observa los resultados del análisis anterior, nótese en la columna Precio sombra, el valor de 160 para la restricción Varilla y 40 para la restricción Días. Esto significa que al variar una unidad en el lado derecho de la restricción Varilla, dentro del rango de 10,5 (Límite inferior) a 30 (Límite superior), la utilidad también aumentará o disminuirá en 160 dólares, por cada unidad que se incremente o disminuya en el lado derecho.

Tabla 6
Rango de valores para el lado derecho de las restricciones

Restricción	**Precio sombra**	**Holgura / Exceso**	**Límite inferior**	**Valor original**	**Límite superior**
Varilla	160	0	10,5	15	30
Madera	0	25	- infinito	25	50
Vidrio	0	20	- infinito	20	40
Días	40	0	18	30	48
Puertas	0	12	- infinito	8	20

Nota. Presenta los resultados del análisis anterior

Cuando la variación es combinada, es decir hay cambios al mismo tiempo en el lado derecho de algunas restricciones, utilizando la información de esta tabla sobre los rangos de variación de lado derecho de cada restricción, se realiza un procedimiento similar al ya explicado, de la regla del 100 por ciento.

Discusión

A lo largo del estudio se determina la facilidad con la que se puede realizar el análisis de sensibilidad mediante el uso de software, la rapidez y amplitud de información que este genera, hace que programas como POM-QM sean de gran utilidad en el ámbito empresarial, sin embargo, si no dispone de esta herramienta informática, existen varias alternativas en el mercado, en la Web o en los textos de IO, como son: Tora, Excel QM, Geogebra, Solver de Excel, etc., que producen resultados análogos, así como información y funcionalidad similar.

La investigación se limita al estudio y problemas con dos variables de decisión, se pueden utilizar m, ya que en estos se puede usar el método gráfico facilitando la visualización de algunos elementos del modelo y su variación, como el área de solución factible, las restricciones y la inclinación (pendiente) de la Función Objetivo, sin embargo la versatilidad del método garantiza el uso de la programación lineal con más de dos variables que requieran minimización.

El análisis de sensibilidad es aplicable a cualquiera de las dimensiones del ámbito empresarial, no solo en manufactura como el caso presentado, sino que puede ser aplicable a las áreas de: Servicios, compras, ventas, inversiones.

Finalmente se puede concluir que la solución de un problema de Programación lineal mediante el método gráfico es muy limitada, aunque útil para observar descriptivamente los resultados, en cambio cuando se trata de analizarlos se vuelve una tarea muy tediosa y larga, cada vez que se genera un cambio, para visualizar su efecto se debe resolver el modelo como si fuera otro problema. Con la ayuda de software especializado, cualquiera que este sea, esta tarea se aliviana y permite sacar muchas conclusiones, con la información que se obtiene se puede proyectar el incremento o decremento de la utilidad, simulando escenarios de variación de precios, esto se deduce del análisis de cabios en los coeficientes de la FO, abordado en la primera parte del modelo y que se complementa con la aplicación de la regla del 100 por ciento. También es importante que el Administrador o el responsable de los procesos en una empresa, pueda proyectar el nivel de producción que tendrá si dispone de mayor o menor cantidad de materiales, esto es posible si se pone en práctica la segunda parte del modelo demostrado, cuando se realicen cambios en la parte derecha de las restricciones (recursos limitados).

La resolución de un problema con más de dos variables para un análisis de sensibilidad se puede convertir en una labor muy compleja en las organizaciones ya que se deben emplear algoritmos más complejos en este caso se puede emplear el método SIMPLEX acompañado de un software que permita resolver problemas mediante la programación lineal sin restricción de variables, que mediante la interatividad irá mejorando las soluciones paso a paso.

El análisis de sensibilidad con modelos de programación lineal, puede reflejarse en la siguiente ecuación matemática:

I	$B^{-1}D$	$B^{-1}b$
0	$C_D^T - C_B^T B^{-1} D$	$-C_B^T B^{-1} b$

Dónde:
I: Matriz Identidad
0: Costos reducidos asociados a las variables básicas
B: Matriz de variables básicas
D: Matriz de variables no básicas
b: Lado derecho
Cb: Coeficientes en la función objetivo asociados a las variables básicas
Cd: Coeficientes en la función objetivo asociados a las variables no básicas

Lista de referencias

Anderson, D. R. (2011). *Métodos Cuantitativos para los Negocios* (11° ed.). México: Cengage Learning Editores.

Buitriago, O. Y., & Ramírez, A. L. (2017). Determinación de un Punto de inicio en Algoritmos de punto interior en la solución de Problemas de Programación Lineal. *Información tecnológica, 28*(5), 23-30. doi:http://dx.doi.org/10.4067/S0718-07642017000500004

Coronado-Hernandez, J., & Garcia-Sabater, J. y. (2017). Modelo fuzzy de programación lineal entera-mixta para el cálculo de stocks objetivos. *ResearchGate*. Obtenido de https://www.researchgate.net/publication/266874063_Modelo_fuzzy_de_programacion_lineal_entera-mixta_para_el_calculo_de_stocks_objetivos

Díaz-Madroñero, M., Peidro, D., & Mula, J. y. (2010). Enfoques de programación matemática fuzzy multiobjetivo para la planificación operativa del transporte en una cadena de suministro del sector del automóvil. *Métodos cuantitativos para la economía y la empresa, 9*, 44-68. Obtenido de https://www.upo.es/revistas/index.php/RevMetCuant/article/view/2148

Eppen, G., Gould, F., Schmidt, C., Moore, J., & Weatherford, L. (2000). *Investigación de Operaciones en las Ciencias Administrativas* (5ta ed.). Mexico: Prentice Hall Hispanoamericana, S. A.

Guzmán Quiroga, S., & Peeters, I. (2006). Una visión metodológica diferente en la investigación en salud: el anti-método. *Gaceta Médica Boliviana, 29*(2), 67-71. Obtenido de http://www.scielo.org.bo/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1012-29662006000200014

Hillier, F., & Lieberman, G. (2008). *Introducción a la Investigación de Operaciones* (9na ed.). Mexico: McGraw-Hill.

Morales, D. M. (2012). Modelos de programación lineal fuzzy en la formulación de alimentos para animales. *Avances en Ciencias e Ingeniería, 3*(4), 11-24. Obtenido de http://www.exeedu.com/publishing.cl/av_cienc_ing/2012/Vol3/Nro4/2-ACI1127-11-full.pdf

Mula, J., Peidro, D., Díaz-Madronero, M., & Hernández, J. (2010). Modelos para la planificación centralizada de la producción y el transporte en la cadena de suministro: Una revisión. *Innovar, 20*(37), 179-194. Obtenido de https://search.proquest.com/docview/1677604617?accountid=17192

Ojeda, J., Jiménez, P., Quintana, A., Crespo, G., & Viteri, M. (2015). Protocolo de investigación. (U. d. ESPE, Ed.) *Yura: Relaciones internacionales, 5*(1), 1 - 20.

Ortiz-T., V. K., & Caicedo-R., Á. J. (2014). Mezcla óptima de producción desde el enfoque gerencial de la contabilidad del throughput: el caso de una pequeña empresa de calzado. *Cuadernos de Contabilidad, 15*(37), 109-133. doi:10.11144/Javeriana.cc15-37.mopd

Puche Regaliza, J. C., Costas Gual, J., & Arranz Val, P. (2016). Simulación como herramienta de ayuda para la toma de decisiones empresariales. Un caso práctico. *Métodos cuantitativos para la economía y la empresa, 21*, 188–204. Obtenido de URL: http://www.upo.es/RevMetCuant/art.php?id=122

Ramírez Leal, A. L., Buitrago Suescún, O. Y., & Britto Agudelo, R. A. (2012). Un nuevo algoritmo para la solución de problemas de programación lineal. *Ingeniería e Investigación, 32*(2), 68-73. Obtenido de http://www.bdigital.unal.edu.co/32433/

Render, B. S. (2012). *Métodos Cuantitativos para los Negocios.* (11ava ed.). México: Pearson Educación.

Taha, H. A. (2012). *Investigación de Operaciones* (9na ed.). México: Pearson Educación.